## *<u>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 125</u>*

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

### *Цель работы*

Изучить метод крутильных колебаний на примере измерения главных моментов инерции прямоугольного параллелепипеда.

### *Теоретическое введение*

Моментом инерции $J$ материальной точки относительно оси вращения называется физическая величина, равная произведению массы данной точки $m$ на квадрат расстояния до оси вращения:

$$J = mr^2 .$$

Момент инерции – величина аддитивная. Это означает, что момент инерции тела равен сумме моментов инерции его частей:

$$J = \sum m_i r_i^2 .$$

Для сплошного тела момент инерции находят путем интегрирования:

$$J = \int_m r^2 \, \mathrm{d}m .$$

Если тело однородное (его плотность ρ не изменяется в пределах объема), то интегрирование удобно производить по объему тела:

$$J = \rho \int_V r^2 \, \mathrm{d}V .$$

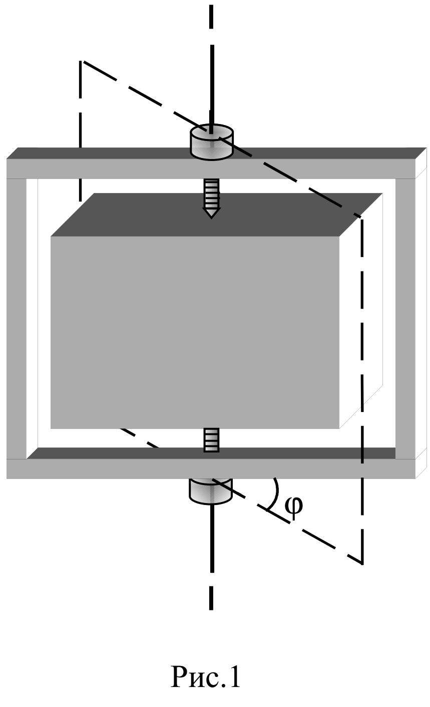

Рис.1

Расчет момента инерции твердого тела представляет собой достаточно сложную задачу. Часто момент инерции определяется экспериментально различными способами. В данной работе использован метод крутильных колебаний.

Пусть тело закреплено в рамке, висящей на упругой нерастяжимой нити так, что направление нити проходит через центр тяжести тела и рамки (рис.1). Рамку поворачивают в горизонтальной плоскости на некоторый угол φ. За счет деформации кручения нити появляется упругая сила, которая создает вращающий момент $M$, стремящийся вернуть систему в исходное состояние. В результате возникают крутильные колебания.

При небольших отклонениях от положения равновесия вращающий момент $M$ пропорционален углу $\varphi$:

$$M = -D\varphi .$$

Знак «–» показывает, что положительное направление момента соответствует уменьшению угла закручивания. Коэффициент пропорциональности $D$ называют модулем кручения. *Модуль кручения* равен моменту силы, который нужно приложить к нити, чтобы закрутить ее на единичный угол.

Если пренебречь силами сопротивления, то основное уравнение динамики вращательного движения записывается в виде

$$-D\varphi = J\beta , \tag{1}$$

где $J$ – общий момент инерции тела и рамки.

Учитывая, что угловое ускорение $\beta = \ddot{\varphi}$, формулу (1) можно привести к виду уравнения гармонических колебаний:

$$\ddot{\varphi} + \frac{D}{J}\varphi = 0 . \tag{2}$$

Решением уравнения (2) является гармоническая функция, например, косинус:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где использовано обозначение

$$\omega_0 = \sqrt{D/J} .$$

Здесь $\varphi_0$ – амплитудное значение угла отклонения; $\alpha$ – начальная фаза; $\omega_0$ – циклическая частота.

Циклическая частота связана с периодом $T$: $\omega_0 = 2\pi/T$. Таким образом, период крутильных колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{J/D} . \tag{3}$$

Если модуль кручения $D$ материала нити неизвестен, для его исключения из формулы (3) следует провести измерения периода колебаний с телом, момент инерции которого легко рассчитывается.

Таким телом может быть, например, куб, все главные моменты инерции которого равны

$$J_0 = J_x = J_y = J_z = \frac{ma^2}{6} . \tag{4}$$

где $m$ – масса куба, $a$ – длина его ребра.

Пусть $J_0$ - рассчитанный момент инерции куба; $J_р$ - неизвестный момент инерции рамки; $J$ - измеряемый момент инерции параллелепипеда относительно некоторой оси. Тогда на основании формулы (3) получим

$$J_р = \frac{T_р^2 D}{4\pi^2}; \quad J_0 + J_р = \frac{T_0^2 D}{4\pi^2}; \quad J + J_р = \frac{T^2 D}{4\pi^2}, \tag{5}$$

где $T_р$ - период колебаний рамки; $T_0$ - период колебаний рамки с укрепленным в ней кубом; $T$ - период колебаний рамки с укрепленным параллелепипедом.

Исключив из уравнений (5) $D$ и $J_р$, получим рабочую формулу:

$$J = J_0 \frac{T^2 - T_р^2}{T_0^2 - T_р^2}. \qquad (6)$$

*Экспериментальная установка*

Установка представляет собой вертикальную колонну, укрепленную на массивном основании. Между верхним и нижним кронштейнами колонны натянута стальная проволока, на которой подвешена рамка. На среднем кронштейне закреплена стальная пластина, являющаяся основанием для фотоэлектрического датчика, электромагнита и шкалы. В процессе колебаний крутильного маятника стрела рамки прерывает световой поток. Подсчет периода колебаний производится с помощью электронного таймера.

*Проведение эксперимента*

1. Включите установку в сеть (на индикаторах таймера должны высвечиваться «0»).
2. Поверните рамку прибора, зафиксируйте стрелу на электромагните.
3. Нажмите клавиши «СБРОС» и затем «ПУСК».
4. После совершения $n$ колебаний (можно взять $n = 10$) нажмите кнопку «СТОП»; считайте по индикаторам число колебаний и время $t_р$ в секундах. Целесообразно сразу вычислить период колебаний по формуле

$$T = t / n,$$

где $n$ - число колебаний; запишите значение $T_р$ в таблицу 1.

5. Отожмите клавишу «ПУСК», зафиксируйте стрелу рамки на электромагните, сбросьте результаты измерений нажатием клавиши «СБРОС».
6. Нажатием клавиши «ПУСК» вновь запустите измерение.
7. Повторите не менее 10 раз пп.4-6; целесообразно использовать одно и то же число колебаний в каждом измерении.
8. Установите в рамку куб и повторите пп.2-6 не менее 10 раз. Результаты измерения периода колебаний рамки с кубом запишите в таблицу 1.

Таблица 1

| № опыта | $T_р$, (с) | $T_0$, (с) | $T_x$, (с) | $T_y$, (с) | $T_z$, (с) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| … | | | | | |
| 10 | | | | | |

| Среднее значение | $< T_р >=$ | $< T_0 >=$ | $< T_x >=$ | $< T_y >=$ | $< T_z >=$ |
|---|---|---|---|---|---|

9. Установите в рамку параллелепипед и повторите измерения пп.2-6 не менее 10 раз.

Период колебаний параллелепипеда измерьте для трех взаимно перпендикулярных осей, для чего параллелепипед следует устанавливать соответствующим образом. Результаты измерений периода колебаний рамки с параллелепипедом $T_x$, $T_y$, $T_z$ запишите в таблицу 1.

*Обработка результатов*

1. Используя значения массы и длины ребра куба (приведены на лабораторном столе), вычислите момент инерции $J_0$ куба по формуле (4).
2. Подставляя в формулу (6) средние значения периодов $< T_x >$, $< T_y >$, $< T_z >$ рассчитайте экспериментальные значения главных моментов инерции параллелепипеда $J_x$, $J_y$, $J_z$; запишите полученные значения в таблицу 2.
3. Проведите оценку погрешностей. Удобно сначала рассчитать относительную ошибку $\Delta J/J$, а затем абсолютную. Логарифмируя формулу (6), а потом дифференцируя по $J_0$, $T$, $T_0$ и учитывая, что $T >> T_р$ и $T_0 >> T_р$, получим формулу для относительной погрешности (нужно уметь выводить эту формулу)

$$\frac{\Delta J}{J} = \sqrt{\left(\frac{\Delta J_0}{J_0}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta T_0}{T_0}\right)^2}, \tag{7}$$

где $\Delta T$, $\Delta T_0$ и $\Delta T_р$ - погрешности измерения периода, включающие в себя случайную и приборную составляющие. При измерении времени автоматическим электронным секундомером приборная погрешность, как правило, значительно ниже, чем случайная. Следовательно, можно ограничиться только случайной погрешностью, которая рассчитывается как средняя квадратичная, с учетом коэффициента Стьюдента $t_N(\alpha)$:

$$\Delta T = t_N(\alpha)\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(T_i - < T >)^2}{N(N-1)}},$$

где $N$ – число измерений; $< T >$ – среднее значение соответствующего периода колебаний; $T_i$ – значение периода колебаний в $i$ – м измерении. Квадрат относительной погрешности момента инерции куба равен

$$\left(\frac{\Delta J_0}{J_0}\right)^2 = \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2, \tag{8}$$

где $\Delta m$ и $\Delta a$ – погрешности массы и длины ребра куба соответственно.

Абсолютная погрешность вычисляется через относительную:

$$\Delta J = \left(\frac{\Delta J}{J}\right) J ,$$

где относительная погрешность момента инерции, стоящая в скобках, вычислена согласно (7) и (8), а среднее значение момента инерции $J$ получено по формуле (6).

Расчеты погрешности проведите для всех трех моментов инерции параллелепипеда, а окончательные результаты представьте в таблице 2 в виде

$$J_x = < J_x > \pm \Delta J_x ; \quad J_y = < J_y > \pm \Delta J_y ; \quad J_z = < J_z > \pm \Delta J_z .$$

4. Если тело представляет собой однородный прямоугольный параллелепипед со сторонами $a$, $b$, $c$ (рис.2), то его главные моменты инерции будут:

$$J_x = \frac{m}{12}(b^2 + c^2); \quad J_y = \frac{m}{12}(a^2 + c^2); \quad J_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2). \tag{9}$$

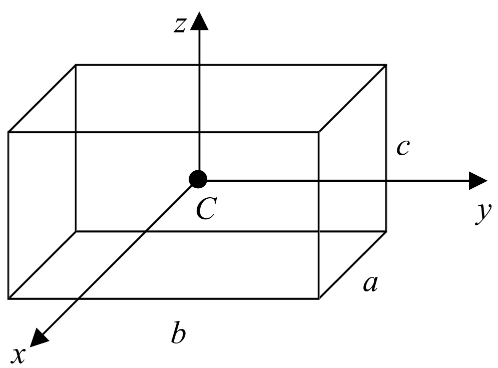


Рис.2

Здесь оси $x$, $y$ и $z$ проходят через центр масс перпендикулярно граням со сторонами $bc$, $ac$ и $ab$.

Используя значение массы и длины ребер (приведены на лабораторном столе), рассчитайте значения моментов инерции параллелепипеда по формулам (9) и запишите их в таблицу 2.

Убедитесь, совпадают ли расчетное и экспериментальное значения моментов инерции в пределах погрешности.

Таблица 2

| Момент инерции | Экспериментальное значение, кг·м$^2$ (по формуле 6) | Расчетное значение, кг·м$^2$ (по формуле 9) |
|---|---|---|
| $J_x$ | | |
| $J_y$ | | |
| $J_z$ | | |

*Контрольные вопросы*

1. Что такое момент инерции материальной точки и твердого тела? В чем заключается физический смысл момента инерции?

2. От чего зависит момент инерции любого тела? Как рассчитывается момент инерции параллелепипеда и куба?

3. Что такое крутильные колебания? Какими уравнениями они описываются?

4. От чего зависит период крутильных колебаний? Что такое модуль кручения?

5. Как определить момент инерции методом крутильных колебаний?
6. Для чего проводятся измерения периода колебаний рамки с кубом?
7. Почему $T$ и $T_0$ много больше периода колебаний рамки $T_р$?
8. Как выводятся формулы погрешности (7) и (8)?

## *Литература*


1. Курс физики: Учебник для вузов. Т.1./Под ред. В.Н. Лозовского. – СПб.: Издательство «Лань», 2000.
2. Савельев И.В. Курс физики. Т.1. М.,1989.
3. Каленков С.Г., Соломахо Г.И. Практикум по физике. Механика: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 1990.