

## ЛЕКЦИЯ 3

**Бифуркация Хопфа. Рождение предельного цикла. Мягкая и жесткая потеря устойчивости. Аналогия с фазовыми переходами I и II рода.**

Среди трех бифуркаций при значениях управляющего параметра  $\lambda = 0, 2, 4$  в предыдущей задаче, одна заслуживает особого внимания. Это бифуркация при значении  $\lambda = 2$ . При  $\lambda = 2$  в характеристических значениях  $p$

$$p_{1,2} = \frac{\lambda - 2}{2} \pm i\sqrt{\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{4}\right)} \equiv p' \pm ip'' \quad (1)$$

реальная часть меняет знак (обращаясь при этом значении в нуль).

Особая точка

$$X_1^{(s)} = 1, \quad X_2^{(s)} = \lambda \quad (2)$$

из устойчивой при  $\lambda < 2$  становится неустойчивой при  $\lambda > 2$ . В результате этого на плоскости  $(X_1, X_2)$  возникает предельный цикл и функции  $X_1(t), X_2(t)$  становятся периодическими функциями времени. Примечательно, что размеры предельного цикла увеличиваются с ростом параметра  $\lambda$  — рис. 1.

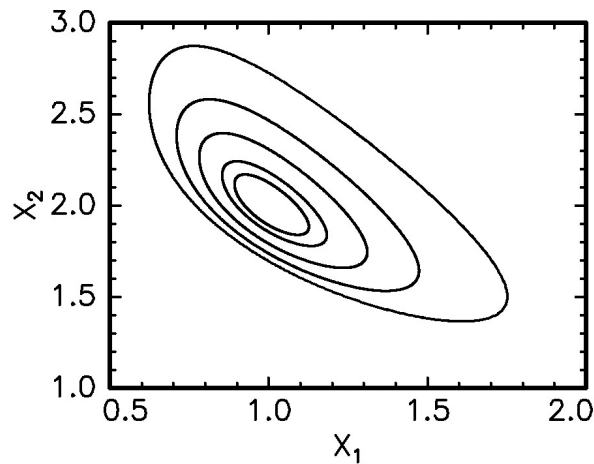
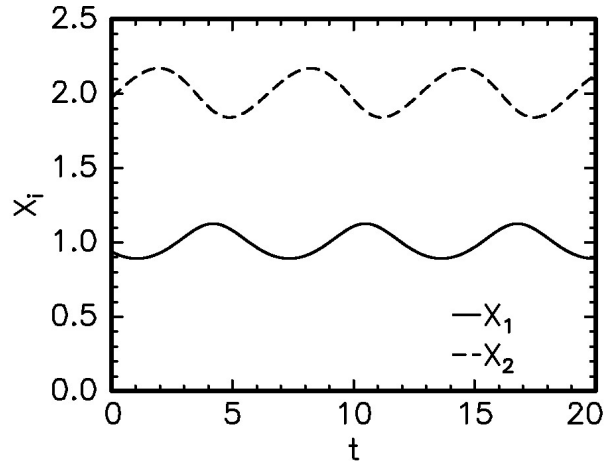


Рис. 1: Рождение предельного цикла. Показаны по мере увеличения размеров орбиты с  $\lambda = 2.01, 2.02, 2.05, 2.1, 2.2$  соответственно.

При малой **надкритичности**  $\varepsilon \equiv \lambda - 2 \ll 1$  это есть гармонические колебания с частотой

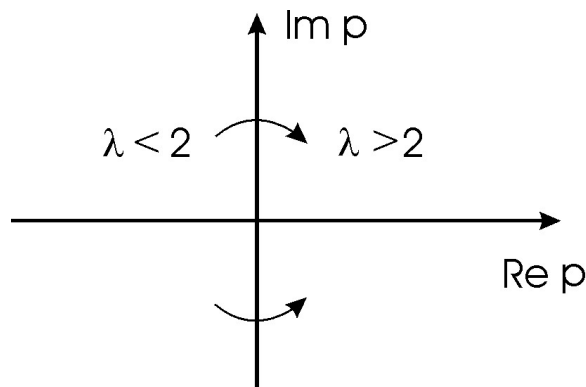
$$\omega = \text{Im } p = \sqrt{\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{4}\right)} \approx 1. \quad (3)$$

Рис. 2: Зависимости  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$  при значении  $\lambda = 2.01$ .

Фазовая траектория (предельный цикл) в этом случае представляет собой эллипс, размеры которого (главные оси)  $a$  и  $b$  и соответственно амплитуда колебаний увеличиваются пропорционально квадратному корню из надкритичности:

$$a \propto b \propto \sqrt{\lambda - 2} \equiv \sqrt{\lambda - \lambda_c}, \quad \lambda_c \equiv 2. \quad (4)$$

Ввиду своей важности, эта бифуркация в физике получила специальное название **бифуркации Хопфа**. При изменении параметра  $\lambda$  оба характеристических значения  $p$  пересекают мнимую ось на комплексной плоскости  $[p]$  (т.е. плоскости  $(p', p'')$ ) — рис. 3. В результате стационарное

Рис. 3: Траектории характеристических значений в зависимости от управляющего параметра  $\lambda$ .

решение (2) становится неустойчивым и в системе возникают периодические колебания. Интересно отметить, что частота этих колебаний  $\omega$  в критической точке не имеет никаких особенностей. Она конечна. Система как бы заранее подготовилась к этим колебаниям. Они существовали и в докритическом режиме (при  $\lambda < 2$ ). Однако там эти колебания бы-

ли затухающими, их амплитуда убывала экспоненциально со временем. Система, выведенная из положения равновесия возвращалась, в него следующим образом — см. рис. 4. Однако по мере приближения (снизу) па-

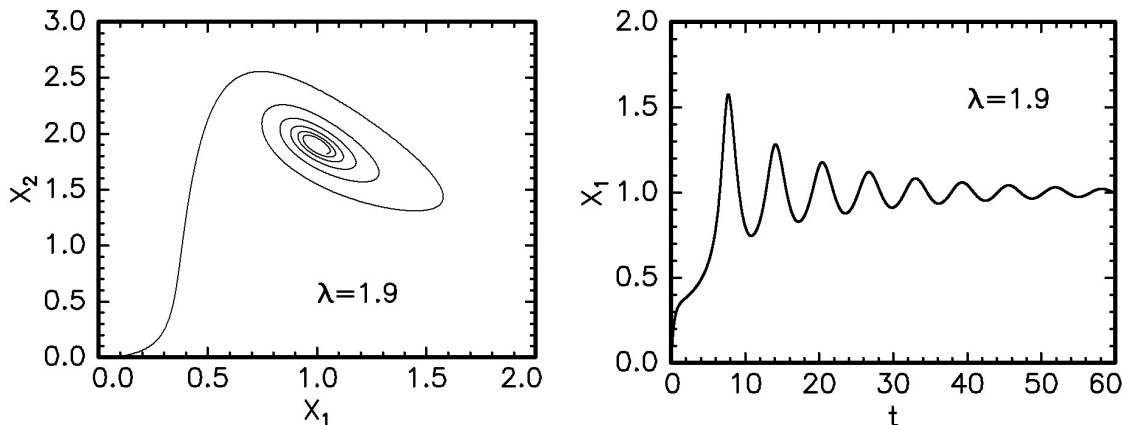


Рис. 4: Релаксация системы к равновесному положению.

раметра  $\lambda$  к критическому значению  $\lambda_c = 2$  затухание колебаний становилось все меньше и меньше и в конце концов в точке  $\lambda = 2$  обращалось в ноль. **При  $\lambda > 2$  затухание колебаний сменяется их усилением.**

Бифуркация Хопфа встречается во многих физических системах. Например, часто она описывает порог генерации в лазерах. Поэтому рассмотрим ее ниже более подробно. При этом не будем ограничиваться какой-то конкретной системой, а разберем сразу достаточно общий случай. Применительно же к нашей конкретной задаче этот анализ проведен до конца в Приложении к лекции.

Итак, предположим, что в результате бифуркации Хопфа комплексная амплитуда  $x$ , характеризующая состояние системы (ее отклонение от положения равновесия, ставшего неустойчивым) стала экспоненциально нарастать со временем:

$$x(t) = \text{const} \cdot e^{\gamma t} e^{-i\omega t} \quad (5)$$

с инкрементом нарастания  $\gamma > 0$ . Этот результат, однако, справедлив лишь в линейном приближении, когда отклонения от состояния равновесия малы. Нелинейные эффекты приводят к тому, что модуль амплитуды нестационарного движения  $|x|$  не растет неограниченно, а стремится к некоторому конечному пределу. При значениях управляющего параметра  $\lambda$ , близких к критическому значению  $\lambda_c$ , этот предел может оказаться все еще мал, и для его определения можно воспользоваться следующим приемом (Л. Д. Ландау, 1944).

Найдем производную по времени от квадрата модуля амплитуды  $|x|^2$ .

Для малых  $t$ , когда еще применима теория возмущений (линейное приближение),

$$\frac{d|x|^2}{dt} = 2\gamma|x|^2. \quad (6)$$

Это выражение справа следует рассматривать как первый член разложения в ряд по степеням  $x$  и  $x^*$ . При учете нелинейных эффектов появляются более высокие степени в этом разложении. Ближайшие следующие члены — третьего порядка по  $x$ . Нас, однако, будет интересовать не точное значение производной, а ее среднее по времени значение. Причем усреднение подразумевается по промежуткам времени, с одной стороны, большими по сравнению с периодом  $2\pi/\omega$ , а с другой стороны, малыми по сравнению с характерным временем нарастания амплитуды  $1/\gamma$ . Поскольку члены третьего порядка ( $x^3$ ,  $(x^*)^3$ ,  $x|x|^2$ ,  $x^*|x|^2$ ) содержат периодические множители  $e^{\pm i\omega t}$  и  $e^{\pm i3\omega t}$ , они из усреднения выпадут. Среди членов 4 порядка единственный, не выпадающий при усреднении, это, очевидно, член  $|x|^4$ . Таким образом, с точностью до членов 4 порядка:

$$\frac{d|x|^2}{dt} = 2\gamma|x|^2 - \alpha|x|^4, \quad (7)$$

где  $\alpha$  — положительная или отрицательная постоянная (**постоянная Ландау**).

Нас для начала будет интересовать ситуация, когда при  $\lambda > \lambda_c$  становится неустойчивым уже сколь угодно малое возмущение. Для этого должно быть  $\alpha > 0$ . Рассмотрим этот случай. Поскольку при  $\lambda > \lambda_c$  инкремент  $\gamma > 0$ , то уравнение (7) имеет устойчивое стационарное решение

$$|x|_{\max}^2 = 2\gamma/\alpha. \quad (8)$$

При этом значении  $|x|^2$  производная  $d|x|^2/dt$  обращается в ноль. Поскольку при  $|x|^2 > |x|_{\max}^2$  эта производная отрицательна, а при  $|x|^2 < |x|_{\max}^2$  — положительна, то данное положение равновесия действительно является устойчивым.

Величина инкремента  $\gamma$  зависит от управляющего параметра  $\lambda$ . Вблизи  $\lambda_c$  функция  $\gamma(\lambda)$  может быть разложена по степеням разности  $\lambda - \lambda_c$ . Поскольку  $\gamma(\lambda_c) = 0$ , то

$$\gamma = \text{const} \cdot (\lambda - \lambda_c), \quad \text{const} > 0. \quad (9)$$

Отсюда получается следующая зависимость установившейся амплитуды колебаний от надкритичности

$$|x|_{\max} \propto \sqrt{\lambda - \lambda_c}, \quad \text{при } \lambda > \lambda_c. \quad (10)$$

Это можно изобразить графически так — рис. 5

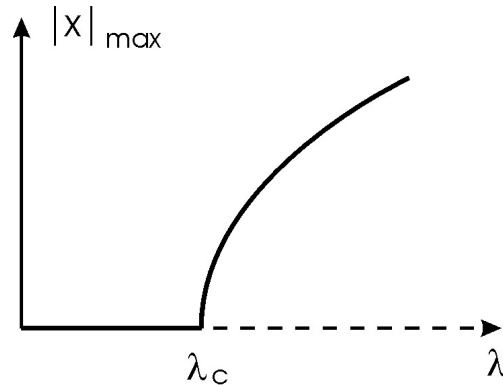


Рис. 5: Мягкая потеря устойчивости.

Рассмотрим теперь случай, когда  $\alpha < 0$ . Для определения предельной амплитуды надо учесть отрицательный член более высокого порядка. Для определенности пусть это будет член  $-\beta|x|^6$

$$\frac{d|x|^2}{dt} = 2\gamma|x|^2 + |\alpha||x|^4 - \beta|x|^6. \quad (11)$$

Тогда, приравнявая правую часть нулю, получаем

$$|x|_{\max}^2 = \frac{|\alpha|}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{2\gamma}{\beta}}. \quad (12)$$

Эту зависимость можно изобразить следующим образом — рис. 6.

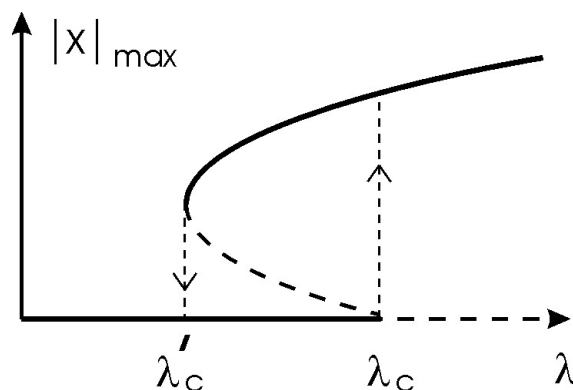


Рис. 6: Жесткая потеря устойчивости.

Бóльший корень (со знаком  $+$  перед квадратным корнем) описывает верхнюю часть этой кривой, а меньший (со знаком  $-$ ) соответственно нижнюю. Значение  $\lambda'_c$  соответствует равенству нулю подкоренного выражения в (12), в то время как  $\lambda_c$  по-прежнему соответствует значению  $\gamma = 0$ . Легко убедиться в том, что верхняя часть кривой является

устойчивой, а нижняя неустойчивой. Она поэтому изображена на рис. 6 пунктиром. Кроме того, можно показать, что решение  $|x|_{\max} = 0$ , которое тоже обращает в ноль правую часть уравнения (11), устойчиво при значениях  $\lambda < \lambda_c$ .

Отсюда следует, что при пересечении  $\lambda$  значения  $\lambda'_c$  (слева направо) в системе ничего не происходит и она остается в состоянии равновесия с  $|x|_{\max} = 0$ . При прохождении же значения  $\lambda_c$  амплитуда колебаний скачком возрастает от нуля до некоей конечной величины, определяемой верхней веткой кривой. В интервале  $\lambda'_c < \lambda < \lambda_c$ , где в наличии имеются два устойчивых решения, состояние системы **метастабильно**. Оно (совпадая с одним из решений) устойчиво по отношению к бесконечно малым, но неустойчиво по отношению к возмущениям конечной амплитуды.

При уменьшении параметра  $\lambda$  система возвращается в состояние равновесия (скачком) не при  $\lambda = \lambda_c$ , а только, при  $\lambda = \lambda'_c$ . Другими словами, в поведении системы имеется так называемый **гистерезис**: эволюция системы (при изменении управляющего параметра) в одну сторону не совпадает с ее эволюцией в обратную сторону.

Таким образом, в обоих рассмотренных случаях в результате потери устойчивости стационарное состояние переходит в колебательный периодический режим. В первом случае после потери устойчивости амплитуда колебаний пропорциональна квадратному корню из надкритичности. Этот вид потери устойчивости называется **мягкой потерей устойчивости**, так как устанавливающийся колебательный режим при малой надкритичности мало отличается от состояния равновесия.

Во втором случае перед тем, как установившийся режим теряет устойчивость, **область притяжения** этого режима становится очень малой, и всегда присутствующие случайные возмущения выбрасывают систему из этой области еще до того, как область притяжения полностью исчезнет. Этот вид потери устойчивости называется **жесткой потерей устойчивости**. При этом система уходит со стационарного движения **скачком** и перескакивает на иной режим движения. Другой характерной особенностью поведения системы в этом случае является уже упомянутый выше гистерезис.

### Аналогия с фазовыми переходами

Между двумя перечисленными выше механизмами потери устойчивости и фазовыми переходами можно провести определенную аналогию. Для

этого обозначим  $|x| = y$  и запишем уравнения движения в виде

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dV}{dy}, \quad (13)$$

где

$$V(y) = -\frac{\gamma}{2}y^2 + \frac{|\alpha|}{8}y^4 \quad (14)$$

для мягкого режима и

$$V(y) = -\frac{\gamma}{2}y^2 - \frac{|\alpha|}{8}y^4 + \frac{\beta}{12}y^6 \quad (15)$$

для жесткого режима потери устойчивости.

В такой форме эти уравнения описывают **передемпфированное движение** частицы в поле с потенциалом  $V(y)$ . Величина  $-dy/dt$  играет при этом роль силы трения. При такой формулировке становится ясным, что устойчивые состояния равновесия — это точки минимума функции  $V(y)$ . — рис. 7. При этом возбуждение в мягком режиме аналогично фазовому

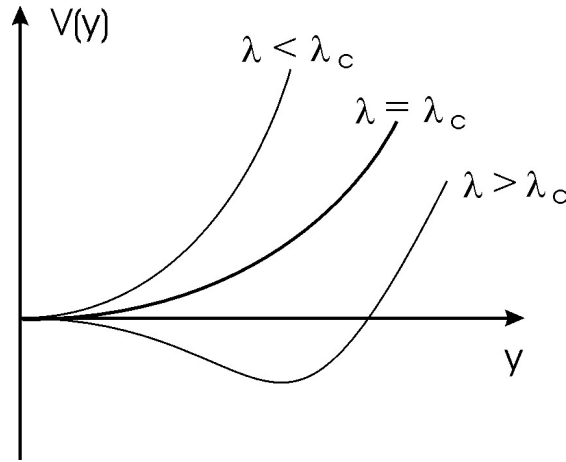
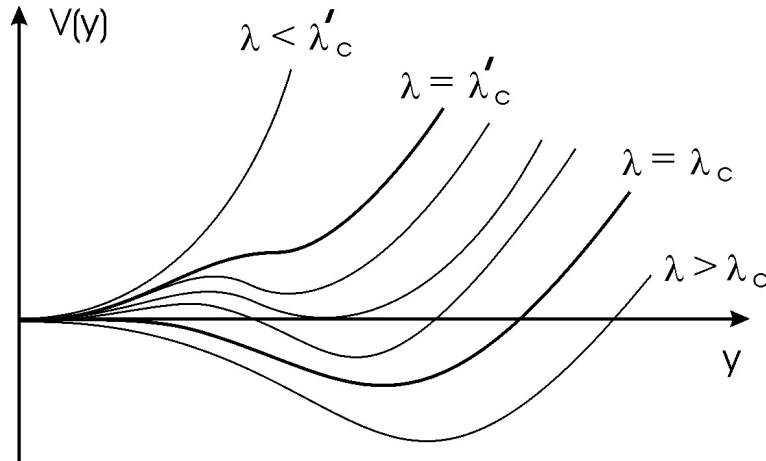


Рис. 7:  $V(y)$  для мягкого режима.

переходу II рода, где параметр порядка  $M \propto \sqrt{T_c - T}$  ниже точки перехода  $T_c$  — рис. 7. А жесткий режим напоминает фазовый переход I рода с присутствием ему гистерезисом — рис. 8.

Рис. 8:  $V(y)$  для жесткого режима.

## Приложение

Вблизи особой точки нашу систему уравнений можно линеаризовать, так что она принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= (\lambda - 1)x_1 + x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\lambda x_1 - x_2.\end{aligned}\quad (16)$$

Умножим первое уравнение на  $A_1$ , а второе на  $A_2$  и сложим:

$$\frac{d}{dt}(A_1 x_1 + A_2 x_2) = x_1 [A_1(\lambda - 1) - \lambda A_2] + x_2(A_1 - A_2). \quad (17)$$

Потребуем теперь, чтобы правая часть этого равенства равнялась бы величине

$$p(A_1 x_1 + A_2 x_2).$$

Для этого необходимо, чтобы равенство

$$x_1 [(\lambda - 1)A_1 - \lambda A_2 - pA_1] + x_2(A_1 - A_2 - pA_2) \equiv 0$$

удовлетворялось бы тождественно при любых  $x_1$  и  $x_2$ . В результате (приравнявая нулю коэффициенты перед  $x_1$  и  $x_2$ ) приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned}(\lambda - 1 - p)A_1 - \lambda A_2 &= 0, \\ A_1 - (1 + p)A_2 &= 0,\end{aligned}\quad (18)$$

условием разрешимости которой является равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 - p & -\lambda \\ 1 & -1 - p \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$



В результате получаем уже нам известное характеристическое уравнение

$$p^2 + (2 - \lambda)p + 1 = 0, \quad (20)$$

которое имеет два комплексно сопряженных корня

$$\begin{aligned} p_1 &= p = \frac{\lambda - 2}{2} + i\sqrt{\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{4}\right)} \equiv p' + ip'', \\ p_2 &= p^* = p' - ip''. \end{aligned} \quad (21)$$

Из второго уравнения системы (18) следует, что

$$A_1 = (1 + p)A_2. \quad (22)$$

Если выбрать теперь  $A_2 = 1$ , то  $A_1 = 1 + p$ . Поэтому далее вместо двух действительных переменных  $x_1$  и  $x_2$  выберем две новых:

$$\begin{aligned} y_1 &= (1 + p_1)x_1 + x_2, \\ y_2 &= (1 + p_2)x_1 + x_2, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — корни характеристического уравнения (20). Но поскольку  $p_2 = p_1^*$ , то  $y_2 = y_1^*$  и поэтому для описания движения достаточно ввести одну **комплексную** переменную

$$y = (1 + p)x_1 + x_2. \quad (24)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$x_1 = \frac{y - y^*}{p - p^*}, \quad (25)$$

$$x_2 = \frac{y^*(1 + p) - y(1 + p^*)}{p - p^*}. \quad (26)$$

Уравнение для комплексной переменной  $y$  в линейном приближении выглядит очень просто

$$\frac{dy}{dt} = py, \quad (27)$$

так что

$$y = \text{const} \cdot e^{pt} = \text{const} \cdot e^{p't + ip''t}. \quad (28)$$

При  $\lambda = \lambda_c$  вещественная часть  $p' = 0$ , а мнимая  $p'' = \omega = 1$ . Конец комплексного вектора  $y$  (при изменении времени  $t$ ) описывает при этом

окружность на комплексной плоскости  $[y]$ . Принимая для определенности величину  $\text{const} = 1$ , получим

$$y = e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t. \quad (29)$$

Из соотношений (25-26) тогда имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= \sin \omega t, \\ x_2 &= \cos \omega t - \sin \omega t. \end{aligned} \quad (30)$$

Это есть параметрическое уравнение эллипса на плоскости  $(x_1, x_2)$  с полуосями

$$a = \sqrt{\frac{2}{3 + \sqrt{5}}} = 0.618, \quad b = \sqrt{\frac{2}{3 - \sqrt{5}}} = 1.618, \quad (31)$$

повернутого на угол  $\alpha = 0.5 \arctg 2 \approx 31^\circ$  против часовой стрелки — рис. 9.

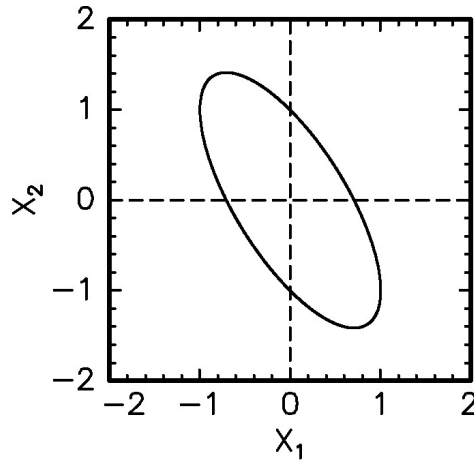


Рис. 9: Эллипс.

При превышении  $\lambda$  критического значения  $\lambda_c$  величина  $y$  (28) экспоненциально растет со временем до тех пор, пока линейное приближение не перестанет быть справедливым. Поэтому для нахождения амплитуды установившихся колебаний нам надо учесть нелинейные слагаемые. Для этого снова вернемся к точной системе уравнений (см. лекцию 2, ф-лу (23))

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= 1 - (\lambda + 1)X_1 + X_1^2 X_2, \\ \dot{X}_2 &= \lambda X_1 - X_1^2 X_2. \end{aligned} \quad (32)$$

Вводя, как и ранее, малые отклонения от положения равновесия

$$x_1 = X_1 - 1, \quad x_2 = X_2 - \lambda, \quad (33)$$

мы приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1(\lambda - 1) + x_2 + \lambda x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1^2x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\lambda x_1 - x_2 - \lambda x_1^2 - 2x_1x_2 - x_1^2x_2,\end{aligned}\quad (34)$$

которая является точной. Действуя по вышеприведенному рецепту, т.е. домножая первое уравнение на  $1 + p$ , а второе на  $1$  и складывая их друг с другом, получим уравнение для комплексной амплитуды  $y$ :

$$\frac{dy}{dt} = py + pg(x_1, x_2), \quad (35)$$

где функция

$$g(x_1, x_2) = \lambda x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1^2x_2, \quad (36)$$

а  $x_1$  и  $x_2$  необходимо выразить через  $y$  с помощью формул (25-26).

После некоторых преобразований мы приходим к уравнению

$$\frac{dy}{dt} = py + pg(y), \quad (37)$$

где нелинейная функция  $g(y)$  представляет собой сумму квадратичного и кубического членов

$$g(y) = g_2(y) + g_3(y). \quad (38)$$

Квадратичный вклад по  $y$  равен

$$\begin{aligned}g_2(y) &= \frac{\lambda - 2(1 + p^*)}{(p - p^*)^2} y^2 + \frac{\lambda - 2(1 + p)}{(p - p^*)^2} (y^*)^2 \\ &+ 2 \frac{2 + p + p^* - \lambda}{(p - p^*)^2} |y|^2,\end{aligned}\quad (39)$$

а кубический

$$\begin{aligned}g_3(y) &= \frac{3 + p + 2p^*}{(p - p^*)^3} y|y|^2 - \frac{3 + p^* + 2p}{(p - p^*)^3} y^*|y|^2 \\ &- \frac{1 + p^*}{(p - p^*)^3} y^3 + \frac{1 + p}{(p - p^*)^3} (y^*)^3.\end{aligned}\quad (40)$$

Нас будет интересовать случай малой надкритичности  $0 < \varepsilon \ll 1$ , где  $\varepsilon = \lambda - 2$ . В случае малой надкритичности и в линейном приближении решение уравнения (37) задается формулой (28) и представляет собой

произведение медленно меняющейся функции  $e^{p't}$  на быстро осциллирующий множитель  $e^{ip''t}$ . Поэтому нам и при решении нелинейного уравнения (37) будет удобно выделить эту быстро осциллирующую часть и искать решение в виде

$$y(t) = a(t)e^{ip''t}, \quad (41)$$

где  $a(t)$  — медленно меняющаяся функция времени (на периоде  $2\pi/\omega = 2\pi/p''$ ). Подставляя такой вид решения в уравнение (37), получим

$$\frac{da}{dt} = p'a + \overline{pg(y)e^{-ip''t}}, \quad (42)$$

где черта сверху означает усреднение времени по периоду  $2\pi/\omega$ , в результате чего в уравнении пропадают быстро осциллирующие члены.

Ясно, что в результате этого усреднения все квадратичные слагаемые обратятся в ноль. Ненулевой вклад в среднее возникнет только от кубического члена типа  $y|y|^2$ . Его, и только его и надо оставить в уравнении. Комплексный коэффициент перед этим членом равен

$$B = p \frac{3 + p + 2p^*}{(p - p^*)^3}. \quad (43)$$

Возвращаясь снова к комплексной переменной  $y$ , получим для нее уравнение

$$\frac{dy}{dt} = py + By|y|^2. \quad (44)$$

При вычислении параметра  $B$  нам достаточно взять его пороговое значение при  $\lambda = \lambda_c = 2$

$$B|_{\lambda=\lambda_c} \approx -\frac{3}{8} + i\frac{1}{8} \equiv B' + iB''. \quad (45)$$

Заметим при этом, что довольно важно, что вещественная часть  $B' < 0$ .

Решение уравнения (44) будем искать в виде

$$y = re^{i\phi}, \quad (46)$$

где  $r = r(t) > 0$  и  $\phi = \phi(t)$  — вещественные функции времени. Подставляя такой вид решения в уравнение (44) и разделяя вещественную и мнимую части, получим

$$\frac{dr}{dt} = p'r + B'r^3, \quad (47)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = p'' + B''r^2. \quad (48)$$

Это система двух связанных дифференциальных уравнений. Благодаря тому, что  $B' < 0$ , первое уравнение имеет стационарное (устойчивое) решение

$$r = r_0 = \sqrt{\frac{p'}{|B''|}} = \sqrt{\frac{4}{3}}\sqrt{\lambda - 2} \quad !!! \quad (49)$$

Подставляя теперь это решение во второе уравнение для фазы, находим

$$\phi = (p'' + B''r_0^2) t \equiv \tilde{\omega}t, \quad (50)$$

где перенормированная частота  $\tilde{\omega}$  зависит от амплитуды колебаний  $r_0$ :

$$\tilde{\omega} = \omega + B''r_0^2. \quad (51)$$

В результате имеем

$$y(t) = r_0 e^{i\tilde{\omega}t}, \quad \text{с } r_0 \propto \sqrt{\lambda - \lambda_c}. \quad (52)$$

В пересчете на координаты  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  фазовая траектория представляет собой эллипс с полуосями (сравни с выражением (31))

$$a = r_0 \sqrt{\frac{2}{3 + \sqrt{5}}} = 0.618r_0, \quad b = r_0 \sqrt{\frac{2}{3 - \sqrt{5}}} = 1.618r_0, \quad (53)$$

повернутого на угол  $\alpha = 0.5 \arctg 2 \approx 31^\circ$  против часовой стрелки (см. рис. 9).